Mértékek, arányok, virágok

Jézus korában 165 millióan, 1800-ban 1 milliárdan, és 1900-ban 1,6 milliárdan voltunk. Ma már 7,8 milliárdan vagyunk. Növekedésünk rátája az ipari forradalommal érte el a természetes alapú logaritmus szerinti 2,718-at, akár büszkék is lehetnénk erre. A növekedés tragédiája azonban az, hogy biológiai szükségleteinkhez képest nagyságrendekkel emelkednek a mesterségesen doppingolt civilizációs költségeink. Ma már biológiai energia szükségleteink százezerszeresét fogyasztjuk a föld asztalánál. És nemrég ültek közénk azok a nagy népességű ázsiai országok, amelyek civilizációs igényei még csak most vannak fellendülőben. Pedig az emberiség jelenlegi erőforrás igénye már ma is egy mostaninál másfélszer nagyobb föld megújuló természeti erőforrásaival tartható fent.

Malthus, szembesülve az exponenciális növekedés mivoltával, miszerint egyből kettő, kettőből négy, négyből nyolc stb. lesz, azt feltételezte, hogy a jövő háborúi és a világjárványai biztosítják majd az egyensúlyt (1). Darwin (1808-1882) a gyengébb, kisebb szaporodási esélyű egyedek kiszelektálódásával, és csak az erősebbek továbbszaporodásával árnyalta a Malthus-i jövőképet (2, 3).

A XX. század második felében reménykedtünk, hogy befejeződtek a világháborúk, az antibiotikumokkal legyőztük a járványokat, a születésszabályozással megállítottuk a spontán jóléti túlnépesedést, és a zöld forradalommal hamarosan megoldjuk az élelmiszerválságokat. Az 1970-es évek nagy konjunkturális fellendülése közepette azonban megjelent „A növekedés határai"-című könyv is (4), amelyben néhány gondolkodó aggodalmát fejezte ki a jövőt illetően, és be kell vallanunk, hogy a fogamzásgátlás a házasságok millióinál csupán önző és kényelmi szempont volt, sok más országban pedig tradíciókba ütközött.

A koronavírus 2019 év végi megjelenése újra Malthus korai jövőképére figyelmeztet. Másfél éve szorongva várjuk a mindennapi jelentéseket, hogy mennyi volt új fertőzöttek, az új elhunytak és a gyógyultak száma az elmúlt 24 órában? Nőnek-e, csökken-e az arányok, és mit mutatnak az adatok a megyék összehasonlításában, a többi országhoz képest? Születéseink és halálozásaink számai egyébként másodpercről másodpercre itt követhető nyomon: https://www.worldometers.info/world-population/.

2020 decemberében megjelent Szinetár Miklós „88" –c. könyve (5), amelyben az író 88 esszében teszi közzé élete elmúlt 88 éve tapasztalatait és következtetéseit a múltbeli események történelmi megítéléséről, és mai ítéleteink, véleményeink formálódásáról. A könyv mottója az arány, „Mindig az arányok", „Minden attól függ, hogy mihez képest".

Ezen elgondolkodva ébredtem rá, hogy valóban, mindenki arányít. Arányítja talentumát, sikereit, fizetését, nyugdíját, unokáink számát másokéhoz vagy egy sztenderdhez, vagy egy országos, Európa-, vagy Világcsúcshoz. Arányítja a vállalkozó a bevételi oldalt a kiadásihoz, választáskor a jelölt, a párt a rá eső szavazatok a számát az ellenfelééhez, versenyeken arányít a zsűri. Világhatalmi egyensúlyt tart fent a nagyhatalmak aktuális gazdasági és katonai erejének paritása. És a természetben a töltések, tömegek aránya irányítja a kvantummechanikát és a csillagok, bolygók és holdak tömegarányai a keringési és forgási sebességüket, és a galaxisok egymásba fonódó örvényeit. Rögeszmémmé vált, hogy az arányoknak van egy általános szerepe. Az aránylás egy olyan univerzális, determinisztikus, de eddig rejtett dimenzió lehet, amely szinte kínálja magát, hogy felismerjük, és ha ez megvan, akkor a Világ működését is sokkal jobban megértjük. Sajnos nem tudok futó, támogatott projektről a természettudományos kutatóhelyeken, amely az arányokat ilyen szempontból vizsgálná. Talán azért nem, mert túl nehéz a téma. Mert az „arány" olyan mátrix, amelynek nincsenek fix tájékozódási pontjai, azok maguk az arányosított dolgok. Elhatároztam, hogy csak azért is rendet teszek ebben, és megtalálom az általános összefüggést, amelyért majd hálás lesz az utókor.

Építészeti munkámban racionális számoknak tekintem azokat a számokat, amelyek felírhatók két egész szám véges (befejezett) hányadosaként, irracionálisnak pedig azokat a számokat, amelyek nem írhatók fel két egész szám befejezett hányadosaként. Ezek azok az esetek, amikor a tizedesvessző után a végtelenségig fut a tört. Ilyen szám a „Pi" (π = 3.1415926535897932384626433...) és a „Phy" (φ = 1.61803 39887 49894 84820…). Lineárisnak tekintem mindazon tér-időbeli dolgokat, amelyek monotonok, és a többi dolgok a nem lineárisok.

Vegyük először a nem lineáris arányokat

Az isteni arány megnyilvánulásai a természetben

Az isteni arány, másképpen az aranymetszés évezredek óta egy kitüntetett arány. Elsőször Eukleidész említette, keresve a legesztétikusabb arányokat és mértani formákat. Úgy gondolta, hogy a legharmonikusabb arány az, amikor a kisebbik rész úgy aránylik a nagyobbikhoz, mint a nagyobbik rész az egészhez. Ez az arány számszerűen 1,618… illetve fordított esetben 0,618…, és jelölése a Phi (φ) Pheidiász görög szobrász neve után (6, 7).

A XIII. században Fibonacci, eredeti nevén Leonardo Pisano kidolgozott egy olyan számsort, amelyben minden szám az előző kettő összege. 1 + 1=2, 1+2=3, 2+3=5, 3+5=8, 5+8=13 és így tovább. Ez a Fibonacci-szorozat, amelynek érdekessége, hogy a számok növekedésével a két egymás utáni szám aránya egyre jobban közelít az 1,618-hoz. A Fibonacci sor azért is érdekes, mert ennek megfelelően alakul egyes fafajok ágainak száma. Az első évben csak egyetlen hajtás van. A második évben megjelenik az első oldalág, majd mindkét ág hoz egy újabbat. A sorozatban a szomszédos elemek hányadosának határértéke az aranymetszés arányszáma, vagyis 0,618 (7, 8).

Engelhard 60 tölgyfa összesen 500 levelének mérte meg a hosszát és szélességét, s számította ezek arányát. Bár a munka növénypatológiai indíttatású volt, 235 levél hosszának és szélességének aránya pontosan megfelelt az aranymetszésnek, és a többi is majdnem (6, 8).

A növények leveleinek, a virágok szirmainak, porzóinak, bibéinek, magjainak számaiban is kimutatható az aranymetszés aránya, vagy a Fibonacci-sor. A szirmok száma gyakran 3 vagy 5 a körömvirágé 13; az őszirózsáé 21, egyes százszorszépeknek 34, 55 vagy 89 (6).

A napraforgó tányérján a magok két egymást metsző logaritmikus spirálból álló görbesorozat mentén helyezkednek el. A spirálok a tányér középpontjából indulnak ki. A két ellentétes irányban futó görbesorozatban a spirálkarok száma két szomszédos Fibonacci-szám. Hasonló szabályosságot mutat az őszirózsa, a krizantém, és a százszorszép, a fenyőtobozon a magok elrendeződése, amelyek csigavonalban futnak végig a toboz hengeres tengelyén (6).

Spanyolországban épült egy 300 MW teljesítményű naperőmű, a Planta Solar. 624 darab hatalmas mozgatható tükör fókuszálja a napsugarakat egy toronyra. Fontos tervezési szempont volt, hogy a tükrök ne árnyékolják egymást, amikor szinkron fordulnak a Nap felé. A tervezőasztalról a napraforgó tányérján elhelyezkedő magok elrendeződése köszönt vissza (5).

A nautilusz egy csigaházas polip, hajdan tele volt velük az ős-óceán. A nautilusz héjának keresztmetszete feltárja a cellákat, amelyek arányai egymáshoz képest pontosan megfelelnek a Fibonacci spirálnak. Akárhogy húzhatunk vonalat a középponton áthaladva, mindegyik cella metszetének aránya a következőhöz az aranymetszés szerinti. Fibonacci sorozatoknak felelnek meg a csigaház növekvő kamráinak, a macskák karma, és a nagy a papagájok csőre növekedési sávjainak arányai is (6, 7, 10).

Zeising azt találta, hogy az emberi testen a köldökhöz mérten a törzs és a végtagok illeszkedési pontjai az aranymetszés szerint arányulnak egymáshoz (11, 12). Leonardo da Vinci híres férfialakja a kezét-lábát széttáró Vitruvius-tanulmány. A rajzon Vitruvius kéz és lábfejeinek végeit össze tudjuk kötni egy körrel, amelynek középpontja a köldök. És ha az ujjhegy és a könyök távolságát egy egységnek vesszük, akkor a csukló az aranymetszés pontján van. Ha az alakot a fejtől a sarokig vesszük szemügyre, és a saroktól a köldökig, akkor azok aránya is Phi az egyhez, és ugyanez az arány jellemzi az alakot a csípőjétől a sarkáig, illetve a térdétől a sarkáig mért távolságot is (13). A rajziskolában tanítják, hogy az emberi arcnál a fej vízszintes felezővonala a szem vonala. Ha a szemek vonalát és az áll vonalát felezem, az az orr aljának a vonala. Ha az orr vonalát és az áll vonalát felezem, az a száj vonala. És az aranymetszés arány jön ki akkor is, ha az arc magasságát elosztjuk a szélességével (11, 12). Talán azok a szép arcok, amelyek nem térnek el nagyon ezektől az aránytól?

A görög költők többször említették a bor és a víz keverésénél a 2:1, 3:2, 5:3 arány-párt. Viccesen hangzik, de a „fröccs", a „hosszúlépés" és a „házmester" is az aranyszabályt követik. Lehet, hogy ez ihlette a Varga Pincészetet, hogy egy díjnyertes olaszrizlingjüket „Aranymetszésnek" nevezték el.

Az alumínium-mangán ötvözetben a kristályok három, négy, hat vagy nyolc értékű forgási szimmetriát mutathatnak, ötöst sohasem. Ennek oka az az egyszerű tény, hogy ötszögekkel nem lehet a síkot maradéktalanul lefedni. Térben ez úgy néz ki, hogy négy atom alkot egy tetraédert, 20 darab ilyen tetraéder kis torzulásokkal ikozaéderré áll össze. Az ikozaéder hat darab ötfogású szimmetriatengellyel rendelkezik. Itt fedezték fel az úgynevezett arany rombuszokat, melynek szögei 72 és 108 fokosak, ezek a Penrose-csempék, amelyek belső terei az aranymetszés arányait mutatják (6).

De Hagenmayer, aki könyvében az aranymetszés manifesztálódásának egész példatárát állította össze (14), mégis szkeptikus azzal kapcsolatban, hogy az aranymetszést természeti normának vegyük bár a példákból világos, hogy bizonyos értelemben e szerint dolgozik a természet.

A nem lineáris arányok használatáról

Az antik görög építészet elhíresült az arany arány követésétől. Az arányt azonban nem az épületek méreteiben, hanem a látványában keresték, ugyanis a perspektivikus rövidülések hatását korrigálták ezzel a módszerrel.

Alberti tervei nyomán készítették el Firenzében a 13. században a Santa Maria Novella háromhajós bazilikát. Itt a teljes homlokzat 35 méter oldalméretű négyzetbe foglalható. A vízszintes felezővonal jelöli ki az alsó rész magasságát. A nagy négyzet oldalhosszának felével képzett négyzet pedig pont kétszer fér rá az alsó szakaszra (15).

Le Corbusier az emberi méretek tanulmányozása révén vált az aranymetszés hívévé. 1948-ban jelent meg, majd több kiadást megélt saját arányrendszeréről szóló könyve, a „Modulor" (16). Őt alapvetően a méterrendszer bevezetése (Párizs, 1875; 17) zavarta, mondván, hogy az új etalonnak semmi köze nincs az emberi arányokhoz. A métert a tudós társaság a Föld meridiánjából származtatta, ami azonban mesterséges és önkényes. Nem véletlen, hogy a britek megtartották a lábat és a hüvelyket, azaz az emberi arányokhoz való viszonyítást is, mert a méterrendszer bevezetése előtt épült régi építmények tömbjei, kapui, ablakai, erkélyei, bástyái és tornyai, belső térbeosztásai sokkal harmonikusabbak, mint azon újabbaké, amelyeket a méterrendszert bevezető országokban építeni kezdtek. Le Corbusier a „Modulorhoz" egy 183 cm magasságú, felemelt karú embert választott. Az emberalak a lábai, köldöke, feje, a felemelt karjai ujjainak hegye három intervallumot szolgáltatnak, amelyek egy sor aranymetszést hoznak létre (15, 16). Le Corbusier és irodája ehhez tervezte a bútorokat, a sámlik, székek, asztalok, pultok, polcok magasságát. Le Corbusier azt is meghirdette, hogy a munkahelyi, munkakörnyezeti viszonylatban, a gépeket, munkaeszközöket, bútorokat is az emberhez kell igazítani, formatervezni. Ezzel forradalmat okozott a legjobban megfelelő munkaeszközök és munkakörnyezet kialakítása, hogy minden legyen praktikus, egy munkagép vezetőfülkéjében, egy repülőgép pilótafülkéjében minden „álljon kézre" amellett, hogy a kezelőjük kényelmesen ül. Mai nyelven azt mondjuk, minden legyen ergonomikus.

Le Corbusier „Modulorjának" motivációja még a legműszakibb elméket sem hagyta hidegen, akiknek bármi is a viszonyítási alap, de az legyen lineáris, egymásra épülő, vonalzóval és stopperórával mérhető, amivel a távolság, az idő, és a sebesség egyetemesen kezelhető. Úgyhogy kényszeredetten még Albert Einstein is megszólalt, mondván, hogy Le Corbusier

„Modulorja” az arányok olyan nyelve, amely megkönnyíti a jó dolgok létrehozását és megnehezíti a dolgok eltolását (18).

A képzőművészet a színekkel is operál. Leonardo írja, hogy a jól összeillő színek a zöld a pirossal vagy a bíborral, vagy halványibolyával, a sárga pedig a kékkel. Az egyenlő telítettségű színek közül az látszik kiválóbbnak, amelyik a vele szöges ellentétben levő szín társaságában mutatkozik (19). Idézem Victor Vasarely-t, az op-art magyar származású képviselőjét: „Az egység önmagában is szép,… de a színek megválasztása és erőssége, végül más egységekkel való kombinálása révén nyeri el azt a töklétest, amellyel érzékszerveinkre, majd értelmünkre hatást gyakorol” (20). Ezt jól ismeri a tömegekre hatni akaró reklám is.

A zene hangjainak arany-arányairól nem lehet hitelesen beszéni, mert a zene nyelve nem verbális! Azt hallani kell! A zene abc-je nem a betűk, hanem a kotta, amiből nem szavakká, hanem azonnal átélt hangzatá áll össze az információ. Különböző zenéket kellene bejátszanom, vagy kottáznom, hogy az arany szabály és a Fibonacci számok szekvenciális törvényét bizonyítsam. Ezek az arányok tökléletes tisztaságban jelennek meg a zenében! Itt nics „lehet”, meg „talán”, mert az hamis! Az abszolút hallásúak rosszul lesznek, ha kihallatszik egy hamis hang! Egy példát azért felhozok, amelynek szövege és dallama mindannyiunkban bennünk van: „Kis kece lányom, fehérbe vagyon, fehér a rózsa, kezébe vagyon. Mondom-mondom fordulj ide mátkám-asszony, mondom-mondom fordulj ide mátkám-asszony!„. Burkhard (21) szerint a Fibonacci-számok, és az aranymetszés szabályai már az egyszólamú népdalok ritmusában és dallamaiban, majd többszörös dallam tagolásában megnyilvánulnak! Sőt, sokkal tovább megy ennél, pl. Bach – Nr. 24. Preludium és fuga-ját , Beethoven V. szinfóniáját és más nagy klasszikus és mai zenekari művet elemez az aranymetszés szabájai szempontjából, a XX- századiak közűl pl. Bartók Béla „Zene húros hangszerekre, ütősökre és cselesztára”-c. műve első tételét.

Most vegyünk egy lineáris arányt, hadd nevezzem el ezt az arányok királynőjeként Szimmetriának.

A szimmetria más dolog, mint az eddigi arányok. A példák itt is végtelenek, de sokkal inkább „euklidésziek és pitagorasziak”, ezt úgy értem, hogy „aritmetikájuk” racionális számokkal működik. A formákon felfedezzük a szabályos elrendezettséget is. Ezek mind valamilyen szabályos rendben folynak, valamilyen formai ritmikusságot, periodicitást, ciklikusságot, ismétlődést, analógiát, homológiát, fokozatosságot, hierarchikusságot mutatnak. A „szimmetria” egyébként „együttes mérést, összemérést, helyes arányt” jelent. Pontosabban fogalmazva két vagy több mennyiségnek egész számokkal kifejezhető arányát. A szimmetriákra is a példák sokaságát sorolhatnám, pl. a bilaterális, transzlációs, sugaras, középpontos és homotróp szimmetriákat. A legutóbbit „ideális szimmetriaként” is említik, mert benne minden dolog hasonló bármely másikhoz, a kiindulópontok és irányok között nincs belső összefüggés. És milyen érdekes, hogy amíg az aranymetszés, vagy a Fibonacci arány jellemzik az emberi arcot hosszában, addig a szimmetria keresztben.

Messzire jutottam, de sajnos nem jutottam a végére. Aztán rájöttem, meg is előztek!

Geometriai világnézetünk alapja Euklidész óta az, hogy két pont között a legrövidebb távolság az egyenes. Erre épül Pitagorasz tétele, miszerint a háromszög szögeinek összege 360 fok, és a szögvüggvények. A geodézia, az építészet az építőmérnöki hivatás, szinte minden emberi dimenziójú mérés Euklidészen és Pitagoraszon alapszik. Háromszögelve mér a földmérő, és egyeneseket húzogat a tervezőmérnök, vízszintez a kőműves, mintha az egyenes igazi egyenes lenne. Pedig azóta nem evidens ez, amiót tudjuk, hogy a föld nem lapos, hanem gömbölyű. A horizont szemmagasságból egyenesnek tűnik, de madártávlatból tekintve már látszik a görbülete. Repülőgép ablakból kinézve méginkább. Úgyhogy a sok-sok embermagasságból méricskélt egyenes összességében görbe vonalat ad. Ha az Egyenlítőt, amely 44 ezer km, méterenként bejelöljük, az 44 millió kis egyenesnek tűnik, de ezek összességükben mégis egy kört adnak ki. Ebből adódik, hogy ma már a hétköznapi életben, pl. a hajók, a repülőgépek, a gépkocsik navigációjában ortográfikus légi, vagy műholdfelvételekek alkalmaznak, amelyeken a föld görbületét korrigálták. Ez elengedhetetlen az útvonaltervező programok korrekt működéséhez is.

A egyenes hamisságára már Gauss (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855), Lobacsevszkij (Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij, 1792–1856) majd Dirac (Paul Dirac (1902-1984) rávilágított. Gaussnak gyönyörű tusrajzai is vannak egyenletekkel, amelyekkel a nemlineáris geometria első lépéseit tette meg. Röviden és érthetően, ha egy domború labdán kijelölünk három pontot és azokat a legrövidebb vonalakkal összekötjük, azok nem egyenesek, és az így kapott háromszög szögeinek összege nagyobb, mint 360 fok. Ha egy fényes merőkanál belsejében jelölünk ki három pontot, és azokat a legrövidebb vonalakkal összekütjük, azok sem egyenesek, azok is görbék, és az így kapott háromszög szögeinek összege kisebb, mint 360 fok. **A nemlineáris geometria ténye a XX. sz. elejétől gondolkodók ezreit, tízezreit foglalkoztatta, s ma már elképzelhetetlen törvényszerűségeinek alkalmazása a fizikában, az űrkutatásban és az űrhajózásban (22, 23, 24).** E körülmének felületes megismerése megingatott az arányok univerzalitásába vetett hitemben, hiszen napnál világosabb, hogy ha vannak is arányok, van egy léptékfüggése is a dolognak. Attól függ, hogy mihez képest nézem azt, hogy mi mihez képes van. Ennek pedig nincs határa, tehát nincs megoldás. És mégis volt valaki, aki szerint van, és megtalálta a megoldást. Vegyük a bátorságot hozzá, hogy megértsük!

Ha megrázza a szél az almafát, akkor ez érett alma a tehetetlensége folytán le fog esni a fáról, és minél magasabbról, annál nagyobb sebességgel fog a fejünkre esni. Newton ki is számította, hogy mennyivel fog elvileg gyorsulni a föld gravitációs terében a leeső alma (g = 9,8 m/sec). Régebben sok naív kilőni próbált ágyúgolyókat a Holdba. De bármekkorát durrant az ágyú, a lövedék mindig visszaesett. Ciolkovszkij jött rá, hogy nem elég az egyszeri kezdeti impulzus! Rakétatechnika kell, amely folymatosan gyorsítja a rakétát felfelé haladva. Méghozzá legalább olyan gyorsulással (9,8 m/sec-al), mint a gravitáció gyorsító ereje, csak fordítva, és akkor az űrhajó már ki tud törni a Föld gravitációs teréből a világűrbe (25). Nos, kb. 8 perc alatt kijutottunk a világűrbe. Földkörüli pályán kering az űrállomás. Súlytalanság van, lebeg az űrhajós, lassan úszik a tolla és a jegyzetfüzete a kabinban. Most leválasztanak egy kisebb űrhajót az űrállomástól, és elindítják azt a Marsra! A kis űrhajó is beindítja a hajtóműveit, és ugyanolyan (9,8 m/sec) gyorsulással elszáguld a Mars felé. És mi történik benne? A lebegő toll a tehetetlensége folytán a kis űrhajóban le fog esni annak padlójára, és pontosan ugyanannyi idő alatt, mintha az íróasztalomról esne le a padlóra. Miközben innen, a Földről nézve a távolodó űrhajókban kétszer, háromszor lassabban esik le a toll, hiszen a Földről nézve az űrhajó maga is iszonyú sebessgéggel gyorsulva távolodik! Az idő tehát meghosszabbodik, ezt nevezte el Einstein idő dilatációnak. A tér, az űrhajó belső terének hossza viszont a Földről nézve csökkenni látszik, amelyet Einstein a tér kontrakciónak nevezett el. Forditva is igaz az egész. Végülis egyszerű a képlet, csak képzeljük el, és máris értjük az általános relativitás elméletet. Ez valahol nem más, mint egy szekunder „attól függ, hogy mihez képest”, de van tericer, quadricer és így tovább a végtelenségig.

Einstein ennek megfelelően állt hozzá a Világegyetemhez, tehát úgy, hogy abban végtelen számú csillagok, galaxisok, más kifejezéssel inerciarendszerek egymáshoz képest is gyorsulnak és lassulnak, úgyhogy a gravitáció nélkül is kell lennie egy egyetemes összefüggésnek, amely csak a térben és az időben érvényes. Így született meg a speciális relaivitás elmélet, egy egyesített tér-idő modell, amely a téridőt nem lineárisnak, hanem görbülőnek írja le.

Ezek után már nem állítom, hogy az arányok a természetben determinisztikusak lennének. Érzékszerveink által közvetítetve hatásaik megélésében és megítélésében (tetszik-e valami, vagy nem), azok vektoriális eredőiben (jól érzem-e magam, vagy nem), és aktuális ítéleteinkben azonban mindenképpen determinisztikusak, amely társadalmiasulva a politikai életbe vezet.

Források:

1. https://en.wikipedia.org/wiki/Thomas_Robert_Malthus

2. Ch. Darwin: A fajok eredete a természeti kiválás útján, 1-2.; ford. Dapsy László, revid. Margó Tivadar; Természettudományi Társulat, Bp., 1873-1874 (Természettudományi Könyvkiadó Vállalat);

3. Ch. Darwin: Az ember származása és az ivari kiválás, 1–2.; ford. Török Aurél, Entz Géza, Fülöp Zsigmond, életrajz Margó Tivadar; Természettudományi Társulat, Bp., 1884 (Természettudományi Könyvkiadó Vállalat);

4. Donatella Meadows, Dennis Meadows, Jorgen Randers, William W. Behrers III: The limits to growth, A Report for The Club Of Rome'S Project on the Predicament of Mankind. Universe Books, New York, 1972, 1- 211. http://www.donatellameadows.org;

5. https://kultura.hu/szinetar-miklos-88

6. Pécsi Ágnes: Arany arány. Szentendrei Református Gimnázium. 1 – 18. http://szrg.hu/wp-content/uploads/fies/aranymetszes.pdf

7. Szoboszlai Réka (2017): Az aranymetszés, Tudománypláza 2017/05/02, https://tudomanyplaza.hu/az-aranymetszes/

8. https://hu.wikipedia.org/wiki/Fibonacci

9. Engelhard, A. W.: Host-parasite relationships of *Endoconidiophora fagacearum* (Bertz), the cause of oak wilt, Iowa State University, Retrospective Theses and Dissertations, 1955, 1 – 175. https://core.ac.uk/reader/38908570/

10. Ch. Bartlett: Nautilus spirals and the meta-golden ratio Chi. – Nexus Network Journal 21: 641 – 656 (2019). https://link.springer.com/article/10.1007/s00004-018-0419-3

11. Adolf Zeising (1854): Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers (Új tan az emberi test arányairól), Leipzig, Rudolph Weigel: 1 – 457, https://books.google.de/books?id=dnnrCA_wTigC&printsec=frontcover&hl=hu&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false

12. Adolf Zeising (1855): Ästhetische Forschungen (Esztétikai kutatás), Frankfurt a.M., Meidinger Sohn und Comp., 1 – 570, https://books.google.de/books?id=XHNaAAAAcAAJ&printsec=frontcover&hl=hu&source=gbs_ViewAPI&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false;

13. https://hu.wikipedia.org/wiki/vitruvius-tanulmány

14. O. Hagenmayer: Der Goldene Schnitt – Ein Harmoniengesetz und seine Anwendung. München, Augustus Verlag, 1984.

15. G. Gangwar: Princiles and applications of geometric proportions in architectural design. – International Conference on „Architecture, Civil and Environmental Engineering" (ACEE-2017), New Delhi. https://www.researchgate.net/publication/317725370_Principles_and_Applications_of_Geometric_Proportions_in_Architectural_desing

16. Le Corbusier, Charles-Edouard Jeanneret (1948): El Modulor 2. https://dokumen.tips/documents/le-corbusier-el-modulor-2-pdf.html

17. http://www.kislexikon.hu/meterrendszer.html

18. https://www.phaidon.com/agenda/architecture/articles/2019/january/17/what-happened-when-einstein-met-le-corbusier/

19. Leonardo da Vinci: Trattato della pittura. 1632. https://it.wikipedia.org/wiki/Trattato_della-pittura

20. https://hu.wikipedia.org/wiki/Victor_Vasarely

21. Benedikt Burghardt (2017): Az aranymetszés formavilága a természetben és az emberben, DLA doktori értekezés, Liszt Ferenc Zeneművészeti Egyetem 28. számú művészet és művelődéstörténeti besorolású doktori iskola: 1 – 222, https://apps.lfze.hu/netfolder/PublicNet/Doktori%20dolgozatok/benedikt_burghardt/disszertacio.pdf

22. Oláh István (2009): PARADOXONOK AZ INFORMATIKÁBAN, Szakdolgozat, Debreceni Egyetem, 1-82, https://core.ac.uk/download/pdf/160920577.pdf

23. Frederic Morton: Alkonyi villámlás, Bécs, 1913-1914.- General Press Kiadó, 2001, 1 – 231, ISBN 978 963 643 054 2

24. John D. Barrow: A művészeti világegyetem. – Vince Kiadó, 1998, 1 – 312, ISBN 963 9192 732

25. https://hu.wikipedia.org/wiki/Konsztantyin_Eduardovics_Ciolkovszkij